المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum
Development

رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

إجابات كتاب التمارين

12

إجابات الوحدة الأولى

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب التمارين– مادة رياضيات الأعمال– الصف الثاني عشر الأكاديمي ف1

الوحدة الأولى: المصفوفات

أستعد لدراسة الوحدة

تبسيط مقادير عددية صفحة 6	
1	$4(-1)+3(6)-5(8)=-4+18-40=-26$
2	$3\big(4-(-2)\big)+5(-3+8)=3(6)+5(5)=18+25=43$
3	$9(7-4)+2(-4)^2=9\times 3+2\times 16=27+32=59$
4	$4(7+6-2)-2\big(-3+9-(-2)\big)=4\times 11-2\times 8=44-16=28$
5	$4(-3)(5)+6(-2)(-8)+0(4)(-3)=-60+96+0=36$
6	$2\big(3(-4)-5(-6)\big)-3\big(5(-2)-6(3)\big)=2(-12+30)-3(-10-18)$ $=2(18)-3(-28)=36+84=120$
حل المعادلة الخطية بمتغير واحد صفحة 7	
7	$7x-6=18\Rightarrow 7x=24$ $\Rightarrow x=\frac{24}{7}$
8	$-5x+3=2x+8\Rightarrow 7x=-5$ $\Rightarrow x=-\frac{5}{7}$
9	$2(x-5)+6x=8\Rightarrow 2x-10+6x=8$ $\Rightarrow 8x=18$ $\Rightarrow x=\frac{18}{8}=2.25$
10	$38+7k=8(k+4)\Rightarrow 38+7k=8k+32$ $\Rightarrow k=6$
حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد صفحة 7	
11	$x^2+6x=0\Rightarrow x(x+6)=0$ $\Rightarrow x=0\ ,\ x=-6$

12	$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0$ $\Rightarrow x=4 \ , \ x=-1$
13	$10x^2+3x-4=0 \Rightarrow (5x+4)(2x-1)=0$ $\Rightarrow x=-\frac{4}{5} \ , \ x=\frac{1}{2}$
14	$x^2-2x=4 \Rightarrow x^2-2x-4=0$ $a=1 \ , \ b=-2 \ , \ c=-4$ $x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}$ $\Rightarrow x=1-\sqrt{5} \ , \ x=1+\sqrt{5}$
حل أنظمة معادلات خطية بمتغيرين بالحذف والتعويض صفحة 9	
15	$x+3y=17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $2x-3y=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بجمع المعادلتين (1) و (2) ينتج: $3x=15 \Rightarrow x=5$ وبالتعويض في المعادلة الأولى ينتج: $5+3y=17 \Rightarrow y=4$ إذن، الحل هو $(5,4)$
16	$3x-4y=16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $x=2y-3 \Rightarrow x-2y=-3 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ نضرب المعادلة الثانية في -2 ثم نجمع المعادلتين فينتج: $3x-4y=16$ $-2x+4y=6$ $\Rightarrow x=22$ وبالتعويض في المعادلة الثانية ينتج: $22-2y=-3 \Rightarrow y=\frac{25}{2}$ إذن، الحل هو $\left(22,\frac{25}{2}\right)$

الدرس الأول: مقدمة في المصفوفات

1	2×3
2	3×1
3	2×2
4	1×3
5	3×3
6	4×3
7	$P = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 75 \\ 30 & 40 & 55 \\ 50 & 70 & 90 \\ 65 & 90 & 125 \end{bmatrix}$
8	$p_{32} = 70$ ويمثل سعر القهوة وسط بالقروش في أحد المحال التجارية
9	$p_{23} = 55$
10	$x + 3 = 4 \implies x = 1$ $x + y = 8 \implies 1 + y = 8 \implies y = 7$ $z = y + 4 \implies z = 7 + 4 = 11$
11	$\begin{bmatrix} 54 & 94 & 75 \\ 12 & 23 & 18 \end{bmatrix}$
12	$54 + 94 + 75 = 223$ ويمثل مجموع المدارس التي يتوقع إنشاؤها في المحافظات الثلاثة.
13	$94 + 23 = 117$ ويمثل مجموع المدارس والمراكز الصحية التي يتوقع إنشاؤها في المحافظة الثانية.

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

1	$A+B=\begin{bmatrix}11 & 3\\ 2 & 8\\ 11 & 12\end{bmatrix}$
2	بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $B+C$
3	$C-D=\begin{bmatrix}5 & -30 & -28\\ -11 & -10 & 28\end{bmatrix}$
4	$B-A=\begin{bmatrix}7 & 7\\ -8 & -6\\ 5 & 0\end{bmatrix}$
5	$4A=\begin{bmatrix}8 & -8\\ 20 & 28\\ 12 & 24\end{bmatrix}$
6	$3A-2B=\begin{bmatrix}-12 & -16\\ 21 & 19\\ -7 & 6\end{bmatrix}$
7	$D+2C=\begin{bmatrix}-17 & 30 & 52\\ 14 & 25 & -16\end{bmatrix}$
8	$-\frac{2}{3}D=\begin{bmatrix}6 & -20 & -24\\ -8 & -10 & 16\end{bmatrix}$
9	المضاعف المشترك للمقامات هو 12، لذلك نحول جميع عناصر الممصفوفة إلى كسور مقامها جميعها 12، ثم نخرج $\frac{1}{12}$ عاملًا مشتركًا لعناصر المصفوفة. $A=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{12} & -\frac{6}{12}\\ \frac{3}{12} & \frac{14}{12}\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}20 & -6\\ 3 & 14\end{bmatrix}$ $k=\frac{1}{12}\ ,\ M=\begin{bmatrix}20 & -6\\ 3 & 14\end{bmatrix}$
10	$3+b=9 \implies b=6$ $a+11=3b \implies a+11=18 \implies a=7$ $-2-4=c \implies c=-6$ $-8+12=d \implies d=4$

11	$x - y = 4$ $x + y = 6$ بجمع المعادلتين نجد أن: $2x = 10 \implies x = 5$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن: $x + y = 6 \Rightarrow 5 + y = 6 \implies y = 1$
12	$3\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & 5\end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $2B = 3\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix}6 & -3\\12 & 15\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 5\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix}3 & -8\\14 & 14\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}1.5 & -4\\7 & 7\end{bmatrix}$
13	$x[0 \quad 1 \quad 3] + y[0 \quad 0 \quad 5] = [0 \quad 3-y \quad -7]$ $[0 \quad x \quad 3x] + [0 \quad 0 \quad 5y] = [0 \quad 3-y \quad -7]$ $[0 \quad x \quad 3x+5y] = [0 \quad 3-y \quad -7]$ $x = 3 - y$ $3x + 5y = -7$ نعوض x من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية، فنحصل على: $3(3-y) + 5y = -7 \implies 9 - 3y + 5y = -7$ $\implies 2y = -16$ $\Rightarrow y = -8$ $\Rightarrow x = 3 + 8 = 11$
14	لتكن المصفوفة E انتاج المصانع الثلاثة في النصف الأول، ولتكن F انتاج المصانع الثلاثة في النصف الثاني. فإن المصفوفة التي تمثل انتاج المصانع الثلاثة في العام كاملًا هي E + F $E + F = \begin{bmatrix}700 & 1300 & 670\\650 & 1000 & 890\\480 & 900 & 540\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}850 & 1200 & 670\\540 & 860 & 530\\620 & 750 & 490\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}1550 & 2500 & 1340\\1190 & 1860 & 1420\\1100 & 1650 & 1030\end{bmatrix}$

الدرس الثالث: ضرب المصفوفات

1	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
2	$A_{5\times 3} \times C_{3\times 5} = (A\times C)_{5\times 5}$
3	$C_{3\times 5} \times A_{5\times 3} = (C\times A)_{3\times 3}$
4	$B_{2\times 3} \times C_{3\times 5} = (B\times C)_{2\times 5}$
5	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $C \times B$
6	$AB = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23 & 7 & -20\\ -11 & 7 & 26\end{bmatrix}$
7	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه لا يمكن إيجاد $B \times A$
8	$BC = \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix}$
9	$CB = \begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$
10	$BD = \begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-13\\ 5\end{bmatrix}$
11	$2A + 3BC = 2\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 23\\ -13 & 98\end{bmatrix}$
12	$A^2 = AA = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix}$

13	$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -70\\ 35 & 42\end{bmatrix}$ أو $A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -70\\ 35 & 42\end{bmatrix}$
14	$(CB)^2 = CB \times CB = \begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}-402 & 24 & 582\\ -211 & 57 & 376\\ -781 & 72 & 1171\end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix}1 & 3\\ x & 2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}y & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}y+9 & -7\\ xy+6 & -x-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$ $-x-4 = -3 \implies x = -1$ $y + 9 = 7 \implies y = -2$
16	$\left(\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 16\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-18 & 90\end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}18 & 30\\ 0 & 12\\ 18 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-18 & 90\end{bmatrix}$
17	$B^3 = B \times B \times B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$

18	رتبةA هي 2×1 فيجب أن تكون رتبة C أيضًا 2×1 حتى يمكن جمعها مع المصفوفة A. أفرض أن $C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $A + C = BC \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 6+x \\ 18+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y \\ 2x-y \end{bmatrix}$ $6 + x = 3x + 4y \implies 2x + 4y = 6$ $18 + y = 2x - y \implies 2x - 2y = 18$ بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نجد: $6y = -12 \implies y = -2$ وبتعويض قيمة y في المعادلة الأولى نجد: $x = 7$ إذن، $C = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.
19	$\begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.09 & 0.095 \\ 0.09 & 0.1 \\ 0.13 & 0.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 432 & 452 \\ 674 & 706.5 \\ 671 & 707.5 \end{bmatrix}$
20	$452 - 432 = 20$ $706.5 - 674 = 32.5$ $707.5 - 671 = 36.5$ المندوب الثالث هو الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة.
21	العبارة صحيحة أحيانًا، إذ إن المصفوفتين المربعتين يمكن إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان إذا كان لهما الرتبة نفسها. وكذلك المصفوفتان ذات الرتبتين: $i \times j$ و $j \times i$ يمكن أيضًا إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان حتى لو لم تكونا مربعتين.
22	العبارة صحيحة أحيانًا، لأنه إذا كانت إحدى المصفوفتين صفرية فبالتأكيد حاصل ضربها مصفوفة أخرى صفرية أيضا. لكن، قد يكون حاصل ضرب المصفوفتين مصفوفة صفرية دون أن تكون أيٌّ منهما صفرية، مثلًا: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ مثال آخر: $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

الدرس الرابع: المحددات وقاعدة كريمر

1	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$
2	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$
3	$\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$
4	$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ $= 7(0 + 20) + 3(48 - 8) + 1(-40 - 0)$ $= 140 + 120 - 40 = 220$
5	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 4(-6 - 0) + 2(12 + 6) - 4(0 + 3)$ $= -24 + 36 - 12 = 0$
6	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $= 5(56 - 12) + 3(32 + 12) + 1(8 + 14)$ $= 220 + 132 + 22 = 374$
7	$\lvert AB \rvert = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 39 - 4 = 35$ $\lvert BA \rvert = \begin{vmatrix} -9 & 26 \\ -10 & 25 \end{vmatrix} = -225 + 260 = 35$
8	$x^2 - 16 = 9 \Longrightarrow x^2 = 25 \Longrightarrow x = \pm 5$
9	$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ $\lvert A^2 \rvert = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 16$ $\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$ نلاحظ أن $\lvert A^2 \rvert = \lvert A \rvert^2$

10	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow \quad x(3+5) - y(-1-2) + (5-6) = 0$ $\Rightarrow \quad 8x + 3y - 1 = 0$
11	$3x - 5y = 22$ $2x + y = 6$ $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 22 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{22+30}{13} = \frac{52}{13} = 4$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{13} = \frac{18-44}{13} = \frac{-26}{13} = -2$ إذن، حل النظام هو: $(4, -2)$
12	$5x + 3y = 7$ $2x - 4y = 8$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-28-24}{-26} = \frac{-52}{-26} = 2$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{40-14}{-26} = \frac{26}{-26} = -1$ إذن، حل النظام هو: $(2, -1)$

13	$3x - y = 10$ $5x - 4y = -6$ $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-40 - 6}{-7} = \dfrac{-46}{-7} = \dfrac{46}{7}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-18 - 50}{-7} = \dfrac{-68}{-7} = \dfrac{68}{7}$ إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{46}{7}, \frac{68}{7}\right)$
14	مصفوفة المعاملات عمودها الأول هو معاملات x وعمودها الثاني هو معاملات y، معاملات x تظهر في العمود الأول لمحددة y ، و معاملاتy تظهر في العمود الثاني لمحددة x إذن: $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{6 + 5}{3} = \dfrac{11}{3}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{-4 - 3}{3} = \dfrac{-7}{3}$
15	$A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 7 & 11 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}$ $= -2(11 - 15) - 5(7 - 1) + 1(105 - 11)$ $= 8 - 30 + 94 = 72$ $Area = \frac{1}{2}\lvert A \rvert = \frac{1}{2} \times 72 = 36$

16	ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار، فيكون عدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 4x، وليكن عدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير y. $x + 4x + y = 75 \quad \Longrightarrow 5x + y = 75$ $x + 20x + 10y = 460 \Longrightarrow 21x + 10y = 460$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$ $D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 21 = 29$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix}}{29} = \dfrac{750 - 460}{29} = \dfrac{290}{29} = 10$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix}}{29} = \dfrac{2300 - 1575}{29} = \dfrac{725}{29} = 25$ إذن، عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار هو 10، وعدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير 25، وعدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 10×4 ويساوي 40 ورقة.

الدرس الخامس: النظير الضربي للمصفوفة

1	$AB = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $AB = I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
2	$FG = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.75 & 14.25 \\ 4.75 & 15.25 \end{bmatrix}$ بما أن $FG \neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة F والمصفوفة G لا تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.
3	$M = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\lvert M \rvert = 20 - 20 = 0$ بما أن $\lvert M \rvert = 0$، فإن المصفوفة M منفردة، ولا نظير ضربي لها.
4	$N = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\lvert N \rvert = -6 + 66 = 60$ بما أن $\lvert N \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة N غير منفردة، ولها نظير ضربي هو N^{-1} $N^{-1} = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{11}{60} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$
5	$R = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ، $\lvert R \rvert = -9 - 8 = -17$ بما أن $\lvert R \rvert \neq 0$، فإن المصفوفة R غير منفردة، ولها نظير ضربي هو R^{-1} $R^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{2}{17} & -\frac{3}{17} \end{bmatrix}$

6	$-2x + y = 13$ $x - 2y = -11$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 4 - 1 = 3$ $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $(-5,3)$
7	$4x + 5y = 22$ $3x + 4y = 17$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 16 - 15 = 1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $(3,2)$

8	$3x - 8y = 34$ $-4x + 2y = 28$ $AX = B \implies \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 6 - 32 = -26$ $A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-68-224}{26} \\ \frac{-136-84}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-292}{26} \\ \frac{-220}{26} \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $\left(\frac{-292}{26}, \frac{-220}{26}\right)$
9	$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 15 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \implies x(x+2) - 15 = 0$ $\implies x^2 + 2x - 15 = 0$ $\implies (x+5)(x-3) = 0$ $\implies x = -5 \ , \ x = 3$
10	$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \lvert A \rvert = -4 + 6 = 2$ $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \lvert A^{-1} \rvert = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ $\lvert A^{-1} \rvert = \frac{1}{\lvert A \rvert}$
11	$AB = B^5A \implies BAB = BB^5A$ $\implies BAB = B^6A$ $\implies BAB = IA$ $\implies B(AB) = A$

12

$$BA^2 = A \implies BAA = A$$
$$\implies BAAA^{-1} = AA^{-1}$$
$$\implies BA = I$$
$$\implies BAA^{-1} = A^{-1}$$
$$\implies B = A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ , \ |A| = 4 - 3 = 1 \ , \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\implies B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

13

$$B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \ , \ |B| = -25 - 6a$$

بما أن $a \neq -\frac{25}{6}$، فإن المصفوفة B غير منفردة، ولها نظير ضربي هو B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{1}{-25-6a}\begin{bmatrix} 5 & -a \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-25-6a} & \frac{a}{25+6a} \\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a} \end{bmatrix}$$

$$B = B^{-1} \implies \begin{bmatrix} \frac{5}{-25-6a} & \frac{a}{25+6a} \\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\implies \frac{6}{25+6a} = 6$$
$$\implies 25 + 6a = 1$$
$$\implies 6a = -24$$
$$\implies a = -4$$

بما أن 60% من السعرات مصدرها البروتينات والدهون، فإن 40% الباقية مصدرها من الكربوهيدرات، فإذا كانت كمية الكربوهيدرات في طعامه c g، فإن

$$4 \times c = \frac{40}{100} \times 3600 \Longrightarrow 4c = 1440$$

$$\Longrightarrow c = \frac{1440}{4} = 360\ \text{g}$$

وإذا كانت كمية البروتين x، وكمية الدهون y، فإن:

$$x + y = 750 - 360 \Longrightarrow x + y = 390$$

$$4x + 9y = 3600 - 1440 \Longrightarrow 4x + 9y = 2160$$

فالمعادلة المصفوفية التي تستعمل لحل هاتين المعادلتين هي:

14

$$AX = B \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 4 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 120 \end{bmatrix}$$

مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات $270g$ ، ومن الدهون $120g$ ، ووجدنا في بداية الحل أن ما يتناوله من الكربوهيدرات 360 g